

---

# 超伝導体を対象とした 非線形数値電磁界解析

横浜国立大学 大学院工学研究院  
雨宮 尚之

---

Yokohama National University



## はじめに

---

### □ 超伝導の基本的性質

- ◆ 電気抵抗がゼロ
- ◆ マイスナー効果 → 第一種超伝導体
- ◆ 磁束の量子化 → 第二種超伝導体
- ◆ 臨界温度, 臨界電流, 臨界磁界を持つ.

### □ 超伝導体の分類

- ◆ 第一種超伝導体 ☒ 完全反磁性
- ◆ 第二種超伝導体 ☒ 応用面において重要

---

Yokohama National University





# 交流損失

- 交流磁界下で超伝導体はその内部の電流分布のヒステリシスにより交流損失を発生

電力機器(超伝導電力送電ケーブル, 超伝導モーター&発電機&変圧器等)への応用



交流損失の低減が重要

課題: 損失の正しい評価

- ☒ 超伝導線材(ビスマス系超伝導線材, イットリウム系超伝導線材)
- ☒ 交流損失の分類
- ☒ 交流損失の発生メカニズム

Yokohama National University



# 交流損失の分類

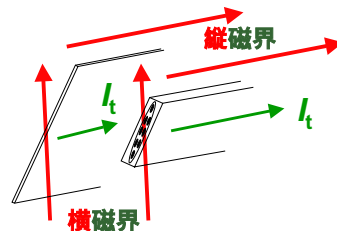
- 交流損失の分類, 発生メカニズム

交流損失



- 磁化損失(交流外部磁界下)
- 通電損失(交流通電)

ヒステリシス損失	磁束線の移動
結合損失	結合電流によって常伝導部で発生するジュール損失
渦電流損失	交流磁界により常伝導部で発生する渦電流損失



Yokohama National University



## 数値電磁界解析の目的

### 交流損失の評価方法

- 実測

#### 交流損失値をマクロに測定

交流損失を発生させている超伝導線材内部のマイクロな電磁現象を把握することは難しい。

- 有限要素法を用いた数値電磁界解析

#### マイクロな電磁現象をシミュレーションし、交流損失値を計算する

超伝導線材内部で起こるマイクロな電磁現象を可視化できる。人的、経済的負担が少ない。



数値電磁界解析は交流損失を評価し、その発生機構を明らかにするために非常に有効な手段

Yokohama National University



## 数値電磁界解析による交流損失値の計算

- 交流損失値の計算方法

ある時刻における超伝導線材断面内の電磁界分布を求める



求めた電流密度分布と超伝導体のE-J特性から、ジュール発熱を計算



交流電流及び交流磁界の1周期分について計算し、総和を求める

||

**交流損失**

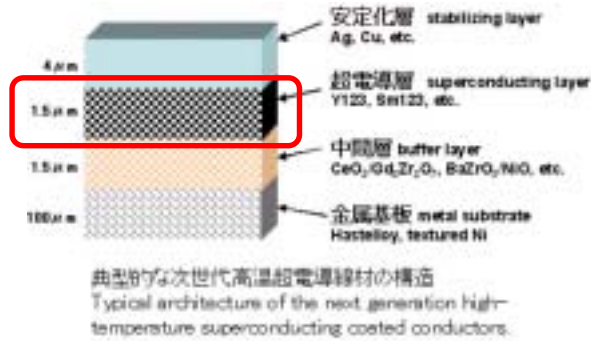
Yokohama National University



# 超伝導線材の二次元断面解析

## □ 超伝導線材の二次元断面解析

- ✓ 厚さ方向に切った断面での電流密度分布の解析



Yokohama National University

## 定式化

### Maxwellの方程式

$$\nabla \times \mathbf{H}_e = \mathbf{J}_e$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_e = 0$$

### T-法

$$\text{ベクトルポテンシャル } \nabla \times \mathbf{T} = \mathbf{J}_e$$

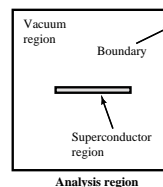
$$\text{スカラーポテンシャル } \mathbf{H}_e = \mathbf{T} - \nabla \Omega$$

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{T} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \mu (\mathbf{H}_0 + \mathbf{T} - \nabla \Omega)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mu (\mathbf{H}_0 + \mathbf{T} - \nabla \Omega) = 0$$

### T-法のメリット

- ✓ 通電電流を境界条件として与えることができる。
- ✓ 外部印加磁界を直接与える事が出来るため、様々な磁界分布での解析が可能。



Yokohama National University

# 超伝導体のE-j特性

## □ 超伝導体のE-j特性の表現法

超伝導体の抵抗は完全には零でない

電流密度が臨界電流密度 $j_c$ に近づく



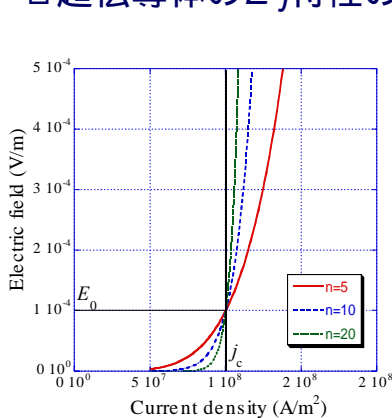
ゆるやかに抵抗発生

電界 $E_{sc}$ が電流密度 $j_{sc}$ の $n$ 乗に比例するとした $n$ 値モデルを採用



# 超伝導体のE-j特性

## □ 超伝導体のE-j特性の表現法



$n$ 値モデル

$$E_{sc} = E_0 \left( \frac{j_{sc}}{j_c} \right)^n$$

$$\sigma_{sc} = \frac{j_{sc}}{E_{sc}} = \frac{j_{sc}}{E_0 \left( \frac{j_{sc}}{j_c} \right)^n}$$

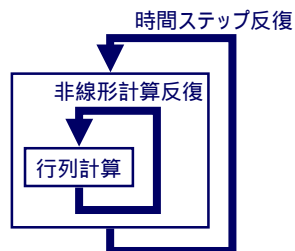
超伝導体の $n$ 値は30~40になるので非常に非線形性が強い。そのため非線形計算の反復計算に時間がかかる。



# 計算アルゴリズム



左記のような計算アルゴリズムを用いる. 時間ステップ反復計算及び非線形反復計算のループ中で係数行列が疎行列となる連立方程式を多数回解くことになる.



## SMS-AMG導入の経緯 —従来の解析対象—

### ビスマス系超伝導線材内部の電磁界解析

- ビスマス系多芯線材に施されるツイストと呼ばれる撚りによる導電率の異方性をテンソルで表現した二次元平面内における三次元電磁界解析
- 数千～一万个程度の要素を持つメッシュで解析

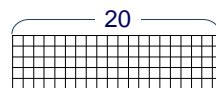
ビスマス系超伝導線材のアスペクト比は20程度で解析対象の規模が小さく, 短時間で解析を行うことが可能だった. 1万円～5万円程度の連立方程式(その時点では非対称行列)を得るため, 行列解法にはSOR法, BiCG法もしくはガウスの消去法を使用していた.

## SMS-AMG導入の経緯 —新しい解析対象—

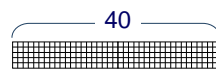
### イットリウム系超伝導線材内部の電磁界解析

- 無限に長い線材の断面を仮定した二次元平面内における電界一次元解析
- 辺要素と節点要素を用いた有限要素法に基づく解析コード
- **十数万個**程度の要素を持つメッシュで解析

イットリウム系超伝導線材が持つ高いアスペクト比によりモデルが大規模化し、**数十萬元の連立方程式**を解く必要が出てきたため、解析コードの高速化が必要となった。



アスペクト比1:4



アスペクト比1:8

厚み方向の分割数及び要素一つのアスペクト比を固定すると対象のアスペクト比が高い方が要素一辺が小さくなり幅方向の要素数が多くなってしまふ。

Yokohama National University

## SMS-AMG導入の経緯

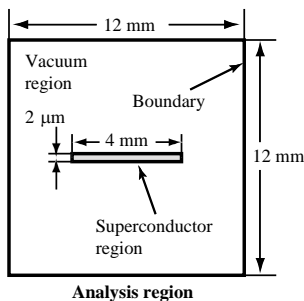
解析モデルのアスペクト比は実際のイットリウム系超伝導線材として妥当である厚み $2\mu\text{m}$ 、幅 $4\text{mm}$ のアスペクト比2000。



解析対象の変更に伴いモデルが大規模化し、**高速に連立方程式を解くことが必要**となる。



**SMS-PICCG ,  
SMS-AMGを導入**



Yokohama National University

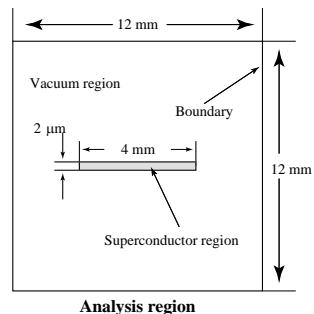
## SMS-PICCGとSMS-AMGの適用結果

SMS-PICCG	SMS-AMG
<p>現在解析を行っているアスペクト比が2000のメッシュでは解析条件によっては解けない場合がある。</p>	<p>現在解析を行っているアスペクト比が2000のメッシュではSMS-PICCGで解けなかった条件下でも解くことができた。</p>



## 解析対象のイットリウム系超伝導線材諸元と解析条件

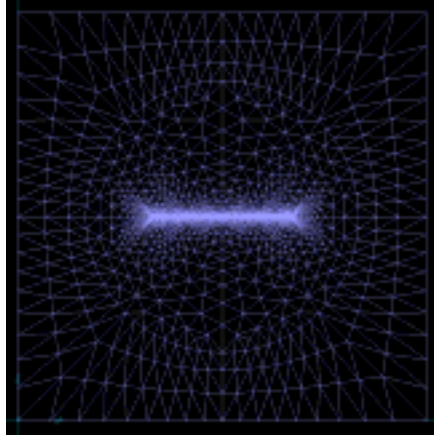
Width × thickness of superconductor	4.0 mm × 2.0 μm
Critical current at 0 T (77 K)	100.0 A
$n$ value at 0 T	20
Transport current / critical current	0.5
Transverse magnetic field	0 mT – 100 mT
Field angle	0 degrees – 90 degrees
Frequency of transport current and transverse magnetic field	50 Hz
Number of nodes in tape and in entire region	68153, 80595
Number of elements in tape and in entire region	128256, 161116



## メッシュ図

---

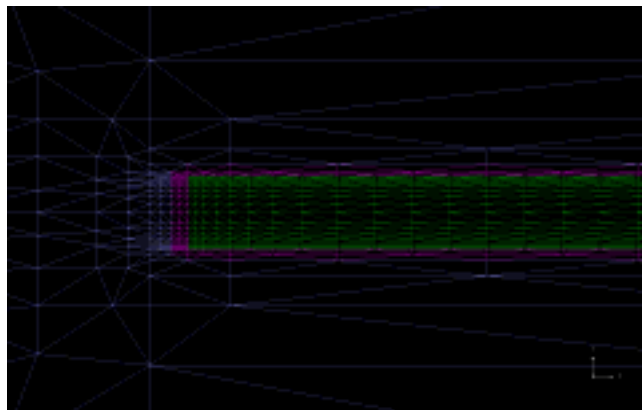
- 解析に用いているメッシュ例(全体図)



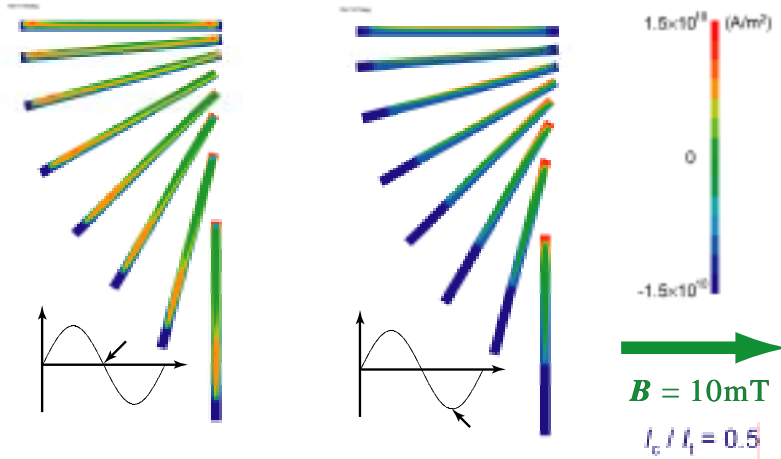
## メッシュ図

---

- 解析に用いているメッシュ例(線材端部)

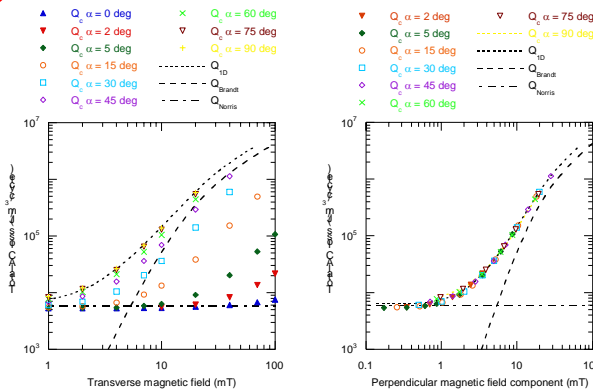


# 計算結果 ー電流密度分布図ー



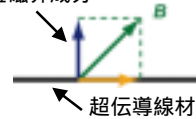
見易さの為に厚み方向に100倍に拡大

# 計算結果 ー損失値ー



線材面に対する垂直磁界成分に対して損失値をプロットすると、全ての磁界角度での損失値は一致した。これは実験による測定結果とも一致するものである。

垂直磁界成分



線材面に対する垂直磁界成分で横軸をプロット

# 計算の高速化の検討

## 反復計算

各時間ステップごとに非線形反復計算を行うため似たような行列を多数回解く必要がある。

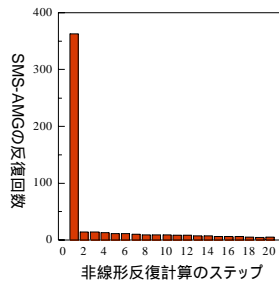
時間ステップ反復

非線形計算反復

行列計算

## 現状のSMS-AMGの反復回数

非線形反復計算の1~20ステップにおけるSMS-AMG法の反復回数



ある時間ステップにおける非線形反復計算の各ステップにおいてSMS-AMGの反復回数は初回ステップのみが非常に多く、それ以外では数回しか反復しない。

非線形計算の前ステップにおける解が良い初期解となっている！

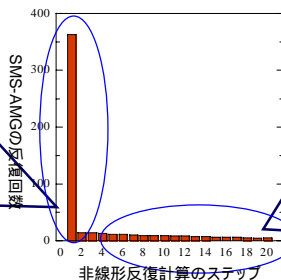
# 計算の高速化の検討 —行列解法の組み合わせ—

## 非線形反復計算の初回付近

良い初期解を与えることができない

収束性の良い行列解法が有効である

非線形反復計算の1~20ステップにおけるSMS-AMG法の反復回数



## 非線形反復計算の回数目以降

非常に近い値を初期解として与えられる

複雑な前処理を必要とする反復解法よりも単純な反復法の方が有効である

行列解法の組み合わせによる高速化

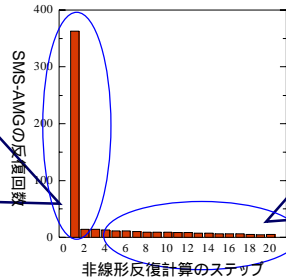
## 計算の高速化の検討 — 行列解法収束トレランスの調整 —

非線形反復計算  
の初回付近

反復計算を行うため  
厳密に解を求める  
必要は無い

↓  
行列解法の収束トレ  
ランスを弛めに設定

非線形反復計算の1～20ステップ  
におけるSMS-AMG法の反復回数



非線形反復計算  
の数回目以降

厳密に解を求める  
必要がある

↓  
収束状況に応じて行  
列解法の収束トレ  
ランスを厳しく設定



行列解法の収束トレランスの調整による高速化

Yokohama National University



## まとめと問題点

- 非線形計算反復における数回目以降のように、初期解としてかなり近い値を与えられる場合には、AMG法は必ずしも他の行列解法よりも早いとは言い切れない。そのため完全なブラックボックスとしてSMS-AMGを使用することが難しく、他の行列解法との併用や、行列解法と非線形計算の収束トレランスのチューニングが必要になってしまう。しかし、正確な時間の比較は行っていないが、これまで用いていた行列解法に比べると格段に計算速度は改善され、これまでは解けなかったメッシュや解析条件下でも計算できるようになり、SMS-AMGの導入により次世代超伝導線材の解析への道が開けたと考えている。

Yokohama National University

